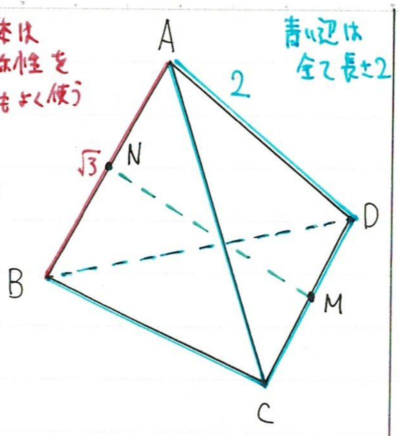
2001年　東大数学　文系第1問　理系第1問

右図の立体を見ると、
対称性から、

立体は対称性をとてもよく使う

・CDの中点をMとすると
平面ABM上に球の中心O
がある。

・また、ABの中点をNとすると、
平面CDN上に球の中心O
がある。



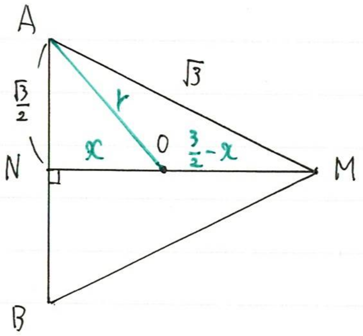
この2つから、円の中心Oの場所を特定される。

ここで、線分MNを見ると、
線分MNは、平面ABM上にも、平面CDN上にもある。
つまり、線分MNは、平面ABMと平面CDNの交線である。
よって、点Oは線分MN上にある。

2平面の共有点の集合は直線になり、「交線」という

↓
線分MNを含む三角形を探す
(結局、さっきのΔABM、ΔCDN)

平面ABMを図示すると、



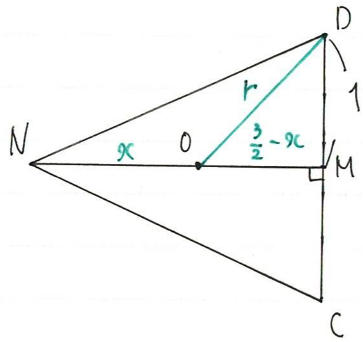
※AMは、ΔACDから、AM=√3と求められる。

※ΔAMNより、
$AM^2=AN^2+NM^2$ なので
$MN=\frac{3}{2}$

ΔABMは3辺とも√3の正三角形であり、
NO=x とすると、
ΔANOについて、

$r^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ …①

平面CDNを図示すると、



$DM=\frac{1}{2}\times DC=1$

ΔOMDについて、

$r^2=1^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2$ …②

①と②の連立方程式を解いて、

① ⇔ $r^2=x^2+\frac{3}{4}$

② ⇔ $r^2=x^2-3x+\frac{13}{4}$

∴ $x=\frac{5}{6}$　$r=\frac{\sqrt{13}}{3}$